1 章　場合の数と確率

0 節　集合

教科書 P.6

問 1　(1)　$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$

(2)　$\{-3,\ 3\}$

教科書 P.7

問 2　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$A\cup C=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$

$B\cap C=\{4\}$

問 3　(1)　$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(2)　$\overline{B}=\{2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$

(3)　(1), (2) より

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{5,\ 8,\ 9\}$

(4)　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7\}$

であるから

$\overline{A\cup B}=\{5,\ 8,\ 9\}$

1 節　場合の数

1　集合の要素の個数

教科書 P.8

問 1　$A=\{1,\ 3,\ 9,\ 27\}$ であるから

$n(A)=4$

教科書 P.9

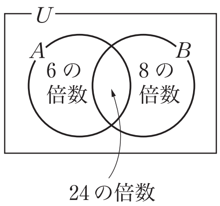
問 2　(1)　100 以下の自然数全体の集合を U とする。U の要素のうち，6 の倍数全体の集合を A，8 の倍数全体の集合を B とすると

$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\}$

$B=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ 8\cdot3,\ \cdots,\ 8\cdot12\}$

また，$A\cap B$ は，6 と 8 の公倍数全体の集合，すなわち，24 の倍数全体の集合であるから

$A\cap B=\{24\cdot1,\ 24\cdot2,\ \cdots,\ 24\cdot4\}$



したがって

$n(A)=16,\ n(B)=12,\ n(A\cap B)=4$

6 の倍数または 8 の倍数である数全体の集合は $A\cup B$ であるから，求める個数は

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

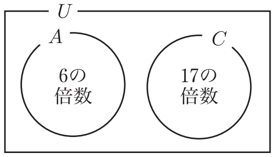
$=16+12-4=$ **24（個）**

(2)　100 以下の自然数全体の集合を U とする。U の要素のうち，6 の倍数全体の集合を A，17 の倍数全体の集合を C とすると

$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\}$

$C=\{17\cdot1,\ 17\cdot2,\ 17\cdot3,\ \cdots,\ 17\cdot5\}$

また，$A\cap C$ は，6 と 17 の公倍数全体の集合，すなわち，102 の倍数全体の集合であるから，U の要素には $A\cap C$ の要素は存在しない。



したがって

$n(A)=16,\ n(C)=5,\ n(A\cap C)=0$

6 の倍数または 17 の倍数である数全体の集合は $A\cup C$ であるから，求める個数は

$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$

$=16+5-0=$ **21（個）**

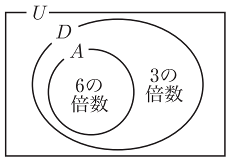
(3)　100 以下の自然数全体の集合を U とする。U の要素のうち，6 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を D とすると

$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\}$

$D=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot33\}$

また，$A\cap D$ は，6 と 3 の公倍数全体の集合，すなわち，6 の倍数全体の集合であるから

$A\cap D=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot16\}$



したがって

$n(A)=16,\ n(D)=33,\ n(A\cap D)=16$

6 の倍数または 3 の倍数である数全体の集合は $A\cup D$ であるから，求める個数は

$n(A\cup D)=n(A)+n(D)-n(A\cap D)$

$=16+33-16=$ **33（個）**

教科書 P.10

問 3　100 以下の自然数全体の集合を U とすると

$n(U)=100$

また，U の要素のうち，3 で割り切れる数全体の集合を A とすると

$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot33\}$

であるから

$n(A)=33$

となる。

3 で割り切れない数全体の集合は $\overline{A}$ であるから，求める個数は

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=100-33$

$=$ **67（個）**

教科書 P.11

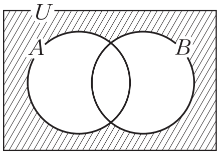
問4 200 以下の自然数全体の集合を U とする。U の要素のうち，6 の倍数全体の集合を A，8 の倍数全体の集合を B とすると

$n(A)=33$，$n(B)=25$，$n(A\cap B)=8$

(1) 6 でも 8 でも割り切れない数全体の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ と表される。

ド・モルガンの法則により

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$



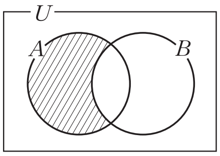
ここで

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=33+25-8=50$$

したがって，6 でも 8 でも割り切れない数の個数は

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=200-50=\mathbf{150}\ \textbf{(個)}$$

(2) 6 の倍数であるが，8 の倍数ではない数全体の集合は $A\cap\overline{B}$ と表される。



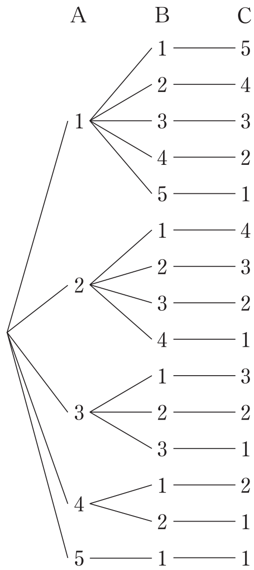
したがって

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=33-8=\mathbf{25}\ \textbf{(個)}$$

2 数え上げの原則

教科書 P.12

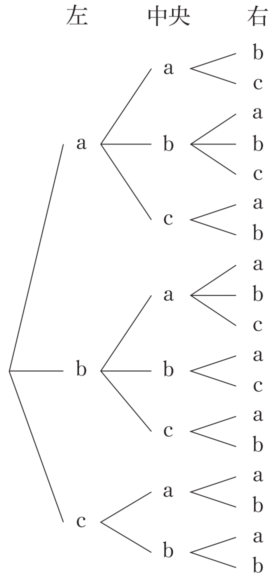
問5 樹形図をかいて調べる。



したがって，目の和が 7 になる場合は全部で

$5+4+3+2+1=$ **15（通り）**

問6 3 個の文字列について，どの文字を使うかを順に樹形図で表すと，下の図のようになる。



したがって，文字列は

aab，aac，aba，abb，abc，aca，acb，
baa，bab，bac，bba，bbc，bca，bcb，
caa，cab，cba，cbb

の **18 通り** である。

教科書 P.13

問7 大小 2 個のさいころの目を（大の目，小の目）で表すとする。

目の和が 5 以下の奇数になるのは，目の和が 3 または 5 になる場合である。

目の和が 3 になる場合，5 になる場合は

和が 3 …(1，2)，(2，1)

和が 5 …(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)

のように，それぞれ 2 通り，4 通りある。

また，目の和が 3 になることと，5 になることは同時には起こらない。

したがって，目の和が 5 以下の奇数になる場合の数は

$2+4=$ **6（通り）**

問8 大小 2 個のさいころの目を（大の目，小の目）で表すとする。

目の和が 4 の倍数になる場合は，和が 4 になる場合，8 になる場合，12 になる場合の 3 つの事柄があり，これらのうち，どの 2 つも同時には起こらない。

それぞれの起こり方は

和が 4 …(1，3)，(2，2)，(3，1)

和が 8 …(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2)

和が 12 …(6，6)

のときで，3 通り，5 通り，1 通りである。

したがって，目の和が4の倍数になる場合の数は

$3+5+1=\mathbf{9}$ **(通り)**

教科書 P.14

問9 ケーキの選び方は7通りあり，そのおのおのに対して，飲み物の選び方は3通りずつある。

したがって，求める選び方は，積の法則により

$7\times3=\mathbf{21}$ **(通り)**

問10 $(a+b)(x+y+z)$ を展開したときの項は，$(a+b)$ の a，b の中から1個，$(x+y+z)$ の x，y，z の中から1個選び，掛け合わせたものである。また，同類項はできない。

したがって，文字の選び方は，$(a+b)$ では2通りあり，そのおのおのに対して，$(x+y+z)$ では3通りずつある。

したがって，求める項の数は，積の法則により

$2\times3=\mathbf{6}$ **(個)**

教科書 P.15

問11 1個のさいころに対して奇数の目の出方は1，3，5の3通りずつある。

したがって，積の法則により

$3\times3\times3=\mathbf{27}$ **(通り)**

問12 (1) 96を素因数分解すると

$96=2^5\cdot3$

となる。ここで

2^5 の正の約数は　1，2，2^2，2^3，2^4，2^5

3 の正の約数は　1，3

であり，2^5 の約数のおのおのに3の約数のそれぞれを掛けると，96の約数のすべてが得られる。

したがって，96の正の約数の個数は，積の法則により

$6\times2=\mathbf{12}$ **(個)**

〔別解〕

右のような表を用いて考えてもよい。

	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5
1	1	2	4	8	16	32
3	3	6	12	24	48	96

(2) 360を素因数分解すると

$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

となる。ここで

2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3

3^2 の正の約数は　1，3，3^2

5 の正の約数は　1，5

であり，2^3 の約数のおのおのに 3^2 の約数のそれぞれを掛け，さらにそのおのおのに5の約数のそれぞれを掛けると，360の約数のすべてが得られる。

したがって，360の正の約数の個数は，積の法則により

$4\times3\times2=\mathbf{24}$ **(個)**

3 | 順列

教科書 P.16

問13 1枚目のカードの選び方は5通りある。

2枚目のカードは残りの4枚から選べばよいから，1枚目の選び方のおのおのに対して，2枚目の選び方は4通りずつある。

3枚目のカードは残りの3枚から選べばよいから，2枚目の選び方のおのおのに対して，3枚目の選び方は3通りずつある。

したがって，並べ方の総数は，積の法則により

$5\times4\times3=\mathbf{60}$ **(通り)**

教科書 P.17

問14 (1) ${}_5\mathrm{P}_2=5\cdot4=\mathbf{20}$

(2) ${}_6\mathrm{P}_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=\mathbf{360}$

(3) ${}_7\mathrm{P}_3=7\cdot6\cdot5=\mathbf{210}$

問15 ${}_5\mathrm{P}_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{120}$

${}_6\mathrm{P}_6=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{720}$

教科書 P.18

問16 20人から3人を選んで1列に並び，端から部長，副部長，マネージャーとすればよいから，求める決め方の総数は

${}_{20}\mathrm{P}_3=20\cdot19\cdot18=\mathbf{6840}$ **(通り)**

問17 続いて並ぶ3人の中学生をまとめて1人とみなすと，並び方の数は4人が並ぶ順列の総数 ${}_4\mathrm{P}_4=4!$ に等しい。その並び方のおのおのに対して，中学生D，E，Fの並び方は ${}_3\mathrm{P}_3=3!$（通り）ある。

したがって，求める並び方の総数は，積の法則により

$4!\times3!=\mathbf{144}$ **(通り)**

問18 1から5までの5個の数字のうち，奇数は1，3，5の3個あるから，両端の数字の並べ方は，3個の奇数から2個を選んで順に並べるので ${}_3\mathrm{P}_2$ 通りある。その並べ方のおのおのに対して，残りの3個の数字が間に並べばよい。

3個の数字の並べ方は ${}_3\mathrm{P}_3=3!$（通り）ある。

したがって，求める整数の総数は，積の法則により

${}_3\mathrm{P}_2\times3!=\mathbf{36}$ **(個)**

教科書 P.19

問19 (1) 3桁の整数が奇数となるのは，一の位が1か3のいずれかのときで，2通りある。

百の位の数字の選び方は，0と一の位の数字以外の3通りある。

その選び方のおのおのに対して，十の位の数字の選び方は3通りある。

よって，求める個数は，積の法則により

$2\times3\times3=\mathbf{18}$ **(個)**

(2) 偶数になるのは，一の位が0，2，4のいずれかのときである。

(i) 一の位が0のとき

百の位，十の位の数字の選び方は，0以外の4個の数字から2個とる順列の総数 ${}_4\mathrm{P}_2$ 通りある。

(ii) 一の位が2，4のとき

百の位の数字の選び方は，0と一の位の数字以

外の3通りある。

その選び方のおのおのに対して，十の位の数字の選び方は3通りある。

よって，積の法則により　　$2\times3\times3$（通り）

(i)，(ii) より，求める個数は，和の法則により

$${}_4P_2+2\times3\times3=\mathbf{30}\ \textbf{（個）}$$

教科書 P.21

問 20 異なる5個のものの円順列の総数を求めればよい。

$$(5-1)!=4!=\mathbf{24}\ \textbf{（通り）}$$

問 21 (1) 隣り合うB組の生徒2人を1人とみなし，5人が座ると考える。これらの座り方に対して，B組の生徒2人が入れかわる座り方を考えると，求める座り方の総数は

$$(5-1)!\times2!=\mathbf{48}\ \textbf{（通り）}$$

(2) 先生1人とB組の生徒2人の合わせて3人を1人とみなし，4人が座ると考える。これらの座り方に対して，先生の両隣にB組の生徒2人が座る座り方を考えると，求める座り方の総数は

$$(4-1)!\times2!=\mathbf{12}\ \textbf{（通り）}$$

教科書 P.22

問 22 (1) 百の位，十の位，一の位の各位には，1，2，3，4，5のどれを用いてもよいから，それぞれ5通りの選び方がある。したがって，求める整数の個数は，積の法則により

$$5^3=\mathbf{125}\ \textbf{（個）}$$

(2) 百の位には1，2，3，4のいずれかを用いるから4通りの選び方がある。十の位，一の位は0，1，2，3，4のどれを用いてもよいから，それぞれ5通りの選び方がある。したがって，求める整数の個数は，積の法則により

$$4\times5^2=\mathbf{100}\ \textbf{（個）}$$

問 23 (1) 5人それぞれについて，A，Bのどちらの部屋に分けるかの2通りの選び方がある。

したがって，A，Bの2つの部屋への分け方の総数は

$$2^5=\mathbf{32}\ \textbf{（通り）}$$

(2) 1つの部屋が空き部屋になるのは，5人全員がA，Bのいずれかの部屋に入る場合であるから，2通りある。

したがって，空き部屋がない場合は，(1)で求めた場合の数から空き部屋ができる場合の数を引けばよいから

$$32-2=\mathbf{30}\ \textbf{（通り）}$$

問 24 集合の3個の要素が部分集合に属するかどうかについて，それぞれ2通りの選び方がある。

したがって，部分集合の総数は

$$2^3=\mathbf{8}\ \textbf{（個）}$$

4 組合せ

教科書 P.24

問 25 (1) ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=\mathbf{10}$

(2) ${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{20}$

(3) ${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\mathbf{210}$

(4) ${}_5C_5=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\mathbf{1}$

問 26 7個の菓子から4個の菓子を選ぶときは順序を考えに入れなくてよいから，その選び方の総数は

$${}_7C_4=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\mathbf{35}\ \textbf{（通り）}$$

問 27 (1) ${}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=\mathbf{21}$

(2) ${}_8C_7={}_8C_1=\dfrac{8}{1}=\mathbf{8}$

(3) ${}_{12}C_9={}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{220}$

教科書 P.25

問 28 円周上の6個の点はどの3点も同じ直線上にはないから，6個の点から4個の点を選ぶと四角形が1つできる。したがって，四角形の総数は

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=\mathbf{15}\ \textbf{（個）}$$

問 29 正八角形の対角線の本数は，8つの頂点から2つの頂点を選ぶ組合せの総数 ${}_8C_2$ から，辺の本数8を引いたものであるから

$$\begin{aligned}{}_8C_2-8&=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}-8\\&=28-8=\mathbf{20}\ \textbf{（本）}\end{aligned}$$

問 30 (1) 高校生2人の選び方は ${}_5C_2$ 通りあり，その選び方のおのおのに対して，中学生2人の選び方は ${}_6C_2$ 通りある。

したがって，求める選び方の総数は，積の法則により

$$\begin{aligned}{}_5C_2\times{}_6C_2&=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\\&=\mathbf{150}\ \textbf{（通り）}\end{aligned}$$

(2) 少なくとも1人は中学生を選ぶ選び方の総数は，11人全員から4人を選ぶ選び方の総数 ${}_{11}C_4$ から，4人とも高校生となる選び方の総数 ${}_5C_4$ を引いたものである。

したがって，求める選び方の総数は

$$\begin{aligned}{}_{11}C_4-{}_5C_4&={}_{11}C_4-{}_5C_1\\&=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-5\\&=\mathbf{325}\ \textbf{（通り）}\end{aligned}$$

教科書 P.26

問 31 (1) 8人の中から，A組に入れる4人の選び方は ${}_8C_4$ 通りある。B組には残りの4人を入れる。

したがって，求める分け方の総数は，積の法則により

$$_8C_4 \times {}_4C_4 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times 1$$
$$= \mathbf{70}\ \textbf{（通り）}$$

(2) (1)の分け方において，A，Bの区別をなくすと同じ組分けになるものが2!通りずつある。
したがって，求める分け方の総数は
$$\frac{70}{2!} = \mathbf{35}\ \textbf{（通り）}$$

教科書 P.27

問32 10個の数字すべてを並べてできる10桁の整数の個数は，1が4個，2が3個，3が2個，4が1個の合計10個を並べるから
$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1} = \mathbf{12600}\ \textbf{（個）}$$

教科書 P.28

問33 図において，右へ1区画進む動きをa，上へ1区画進む動きをbで表すことにする。

(1) AからBまで行く最短経路の総数は，5個のaと4個のbを1列に並べる順列の総数に等しい。
したがって，求める最短経路の総数は
$$\frac{9!}{5!4!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \mathbf{126}\ \textbf{（通り）}$$

(2) AからCに行く最短経路の総数は，2個のaと2個のbを1列に並べる順列の総数に等しいから
$$\frac{4!}{2!2!} = 6\ （通り）$$
また，そのおのおのに対して，CからBに行く最短経路の総数は，3個のaと2個のbを1列に並べる順列の総数に等しいから
$$\frac{5!}{3!2!} = 10\ （通り）$$
したがって，求める最短経路の総数は
$$6 \times 10 = \mathbf{60}\ \textbf{（通り）}$$

(3) AからCを通らずにBまで行く最短経路の総数は，AからBに行く最短経路の総数から，AからCを通ってBまで行く最短経路の総数を引いたものである。
したがって，求める最短経路の総数は
$$126 - 60 = \mathbf{66}\ \textbf{（通り）}$$

(4) AからCD間を通ってBまで行く最短経路の総数は，AからCに行く最短経路の総数6通りのおのおのに対して，DからBに行く最短経路の総数だけある。DからBに行く最短経路の総数は，3個のaと1個のbを1列に並べる順列の総数に等しいから
$$\frac{4!}{3!1!} = 4\ （通り）$$
したがって，求める最短経路の総数は
$$6 \times 4 = \mathbf{24}\ \textbf{（通り）}$$

問題

教科書 P.29

1 (1) 大人3人が円形のテーブルに座る座り方は，異なる3個の円順列の総数を求めて
$$(3-1)! = 2!\ （通り）$$
そのおのおのの座り方に対し，子どもは大人の間に座ればよいから
$$3!\ 通り$$
したがって，求める座り方の総数は
$$2! \times 3! = \mathbf{12}\ \textbf{（通り）}$$

(2) Aを固定し，座ることにする。このとき，BはAと向かい合うところに座るから，1通りに決まる。
残りの4人の座り方は4人が1列に並ぶ順列の総数に等しい。
したがって，求める座り方の総数は
$$1 \times 4! = \mathbf{24}\ \textbf{（通り）}$$

2 異なるn個の要素からr個とる組合せの総数${}_nC_r$は，1つの特定の要素aをr個の中に含むか含まないかに分けると，次のいずれかになる。

(i) aを含む場合の組合せは，n個の要素からaを除いた$(n-1)$個から$(r-1)$個とる選び方があるから
$${}_{n-1}C_{r-1}$$

(ii) aを含まない場合の組合せは，n個の要素からaを除いた$(n-1)$個からr個とる選び方があるから
$${}_{n-1}C_r$$

(i)，(ii)は同時には起こらないから，和の法則により，${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ が成り立つ。

3 縦，横それぞれ2本ずつ選べば長方形をつくることができる。
横2本の選び方は${}_4C_2$通りあり，その選び方のおのおのに対して縦2本の選び方は${}_5C_2$通りある。したがって，求める長方形の個数は，積の法則により
$${}_4C_2 \times {}_5C_2 = \mathbf{60}\ \textbf{（個）}$$

4 (1) 9人の中から，4人の組に入れる生徒の選び方は${}_9C_4$通りある。次に，残りの5人の中から，3人の組に入れる生徒の選び方は${}_5C_3$通りある。2人の組には残りの生徒を入れる。したがって，求める分け方の総数は，積の法則により
$${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = \mathbf{1260}\ \textbf{（通り）}$$

(2) 9人の生徒を3人ずつの組A，B，Cに分ける方法は，(1)と同様にして
$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3\ （通り）$$
ある。ここで組の区別をなくすと，同じ組分けになるものが3!通りずつあるから
$$\frac{{}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3}{3!} = \mathbf{280}\ \textbf{（通り）}$$

(3) 9人の生徒から，5人，2人，2人の3組をつくるとき，2人の組の区別をなくすと，同じ組分

けになるものが2!通りずつあるから

$${}_9C_5\times\frac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=\mathbf{378}\ \textbf{(通り)}$$

5 coffeeの6文字の並べ方は，fが2つ，eが2つ，c，oがそれぞれ1つの合計6つを並べるから

$$\frac{6!}{2!2!1!1!}=180\ (\text{通り})$$

そのうちfが隣り合うものは，2つのfを1つとみなし，5文字を並べると考えると

$$\frac{5!}{2!1!1!1!}=60\ (\text{通り})$$

したがって，求める総数は

$$180-60=\mathbf{120}\ \textbf{(通り)}$$

6 (1) 求める順列の総数は，異なる5個のものをすべて並べる順列の総数に等しいから

$$5!=\mathbf{120}\ \textbf{(通り)}$$

(2) (1)で求めた，5つの文字をすべて区別したときの120通りの順列において，a_1，a_2，a_3の区別をなくすと，3!通りが同じ並べ方を表す。同様に，b_1，b_2の区別をなくすと，2!通りが同じ並べ方を表す。

したがって，3個のaと2個のbをそれぞれ区別しないとき，同じ並べ方は，積の法則により

$$3!\times2!=\mathbf{12}\ \textbf{(通り)}$$

ずつある。

(3) (1)，(2)より，求める順列の総数xについて

$$x\times3!\times2!=5!$$

となる。したがって

$$x=\frac{5!}{3!2!}=\frac{120}{12}=\mathbf{10}\ \textbf{(通り)}$$

探究　空き部屋のない部屋分け

教科書 P.30

考察1 5人それぞれについて，A, B, Cのどの部屋に分けるかの3通りの選び方がある。したがって，A, B, Cの3つの部屋への分け方の総数は

$$3^5=\mathbf{243}\ \textbf{(通り)}$$

考察2 空き部屋がないものとするときの分け方は，空き部屋があってもよい分け方の総数から，空き部屋が1つある場合の総数と2つある場合の総数を引くことで求めることができる。

(i) 空き部屋が1つある場合

A，B，Cのうち，空き部屋の選び方は${}_3C_1$通りある。

また，5人を空き部屋以外の2部屋に空き部屋がないよう分ける分け方は，教科書P.22問23の(2)で求めたように，30通りある。

したがって，空き部屋が1つある分け方の総数は，積の法則により

$${}_3C_1\times30=90\ (\text{通り})$$

(ii) 空き部屋が2つある場合

2つの部屋が空き部屋になるのは，5人全員がA，B，Cのいずれかの部屋に入る場合であるから，この場合の分け方の総数は3通りある。

したがって，5人をA，B，Cの3つの部屋に空き部屋がないように分けるとき，その分け方の総数は

$$243-90-3=\mathbf{150}\ \textbf{(通り)}$$

考察3 まず，A，B，C，Dの4つの部屋に空き部屋があってもよいように分ける分け方の総数を求める。そして

(i) 空き部屋が1つある場合の分け方の総数

(ii) 空き部屋が2つある場合の分け方の総数

(iii) 空き部屋が3つある場合の分け方の総数

を求め，これらの総数の和を，空き部屋があってもよい場合の分け方の総数から引くことで求めることができる。

(参考)

5人をA，B，C，Dの4つの部屋に空き部屋がないように分ける分け方の総数を求めてみよう。

まず，5人をA，B，C，Dの4つの部屋に空き部屋があってもよいように分ける分け方の総数は

$$4^5=1024\ (\text{通り})$$

(i) 空き部屋が1つある場合

A，B，C，Dのうち，空き部屋の選び方は${}_4C_1$通りある。

また，5人を空き部屋以外の3部屋に空き部屋がないように分ける分け方は，考察2で求めたように150通りある。

したがって，空き部屋が1つある分け方の総数は，積の法則により

$${}_4C_1\times150=600\ (\text{通り})$$

(ii) 空き部屋が2つある場合

A，B，C，Dのうち，2つの空き部屋の選び方は${}_4C_2$通りある。

また，5人を空き部屋以外の2部屋に空き部屋がないように分ける分け方は，教科書P.22問23の(2)で求めたように，30通りある。

したがって，空き部屋が2つある分け方の総数は，積の法則により

$${}_4C_2\times30=180\ (\text{通り})$$

(iii) 空き部屋が3つある場合

3つの部屋が空き部屋になるのは，5人全員がA，B，C，Dのいずれかの部屋に入る場合であるから，この場合の分け方の総数は4通りある。

したがって，5人をA，B，C，Dの4つの部屋に空き部屋がないように分けるとき，その分け方の総数は

$$1024-600-180-4=240\ (\text{通り})$$

となる。

参考　3つの集合の和集合

教科書 P.31

問1

$n(A)+n(B)+n(C)$	$a+b+c+2d+2e+2f+3g$
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$	$\boldsymbol{d+e+f+3g}$
$n(A\cap B\cap C)$	$\boldsymbol{g}$

$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+d+e+f+g$

$n(A)+n(B)+n(C)-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}+n(A\cap B\cap C)$

$=(a+b+c+2d+2e+2f+3g)-(d+e+f+3g)+g$

$=a+b+c+d+e+f+g$

したがって，(左辺)＝(右辺) となり，等式①が成り立つ。

問2 200 以下の自然数を全体集合とする。2 で割り切れる数全体の集合を A，3 で割り切れる数全体の集合を B，5 で割り切れる数全体の集合を C とするとき

$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots,\ 2\cdot100\}$

$B=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots,\ 3\cdot66\}$

$C=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots,\ 5\cdot40\}$

$A\cap B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots,\ 6\cdot33\}$

$B\cap C=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots,\ 15\cdot13\}$

$C\cap A=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots,\ 10\cdot20\}$

$A\cap B\cap C=\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ \cdots,\ 30\cdot6\}$

(1) 2 でも 3 でも 5 でも割り切れる数の個数は

$n(A\cap B\cap C)=$ **6 (個)**

(2) 2，3，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数の個数は

$n(A)=100,\ n(B)=66,$

$n(C)=40,\ n(A\cap B)=33,$

$n(B\cap C)=13,\ n(C\cap A)=20$

また，(1) より　$n(A\cap B\cap C)=6$

であるから，① より

$n(A\cup B\cup C)$

$=100+66+40-33-13-20+6$

$=$ **146 (個)**

参考　重複を許してつくる組合せ

教科書 P.32

問1 求める組合せに対して，9 個の○と 3 個の ┃ からなる順列が 1 つずつ対応するから

$\dfrac{12!}{9!3!}=$ **220 (通り)**

教科書 P.33

問2 求める整数 x，y，z の組の総数は，12 個の○と 2 個の ┃ を 1 列に並べる順列の総数に等しい。したがって

$\dfrac{14!}{12!2!}=$ **91 (通り)**

問3 求める購入の組合せの総数は，方程式

$x+y+z+w=6$ を満たす 0 以上の整数 x，y，z，w の組の総数に等しい。

これは 6 個の○と 3 個の ┃ を 1 列に並べる順列の総数に等しいから

$\dfrac{9!}{6!3!}=$ **84 (通り)**

2節　確率とその基本性質

1　事象と確率

教科書 P.35

問1 奇数の目が出る事象は

{1}，{3}，{5}

の 3 個の根元事象からなる。

教科書 P.36

問2 1 個のさいころを投げるとき，6 の約数の目が出る事象 A の確率は，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ より，$n(A)=4$ であるから

$P(A)=\dfrac{4}{6}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

教科書 P.37

問3 2 個のさいころを A，B とし，A の目が a で B の目が b である目の出方を $(a,\ b)$ のように表すと，$6\times6=36$ (通り) の目の出方があり，これらは同様に確からしい。

このうち，目の積が 12 になる場合は

$(2,\ 6)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(6,\ 2)$

の 4 通りであるから，求める確率は

$\dfrac{4}{36}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$

問4 5 個の球の中から同時に 2 個の球を取り出すとき，その取り出し方は全部で ${}_5C_2$ 通りある。これらは同様に確からしい。

このうち，2 個とも白球である取り出し方は ${}_3C_2$ 通りである。

したがって，求める確率は

$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

問5 6 人が 1 列に並ぶ並び方は $6!$ 通りある。

これらは同様に確からしい。

このうち，特定の 2 人 A，B が両端にくる並び方は，$2!\times4!$ (通り) ある。

したがって，求める確率は

$\dfrac{2!\times4!}{6!}=\dfrac{2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{15}}$

問6 6 個の数字から異なる 4 個の数字を選んで並べる順列は ${}_6P_4$ 通りある。これらは同様に確からしい。

(1) 4 桁の奇数となるのは，一の位が奇数の場合である。奇数は 1，3，5 の 3 通りあるから

${}_5P_3\times3$ (通り)

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_5P_3\times 3}{{}_6P_4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) 4桁の5の倍数となるのは，一の位が5の場合であるから

${}_5P_3\times 1$ (通り)

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_5P_3\times 1}{{}_6P_4}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

2 確率の基本性質

教科書 P.38

問7 2個のさいころをX，Yとし，Xの目が x でYの目が y であることを $(x,\ y)$ のように表すと，事象 A，B はそれぞれ

$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)\}$

$B=\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)\}$

となる。したがって

積事象 $A\cap B$ は

$\boldsymbol{A\cap B=\{(2,\ 2)\}}$

和事象 $A\cup B$ は

$$\boldsymbol{A\cup B=\{(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1)\}}$$

教科書 P.39

問8 1個のさいころを2回投げるとき，最初に a の目が出て，2回目に b の目が出ることを $(a,\ b)$ のように表すと，事象 A，B，C はそれぞれ次のようになる。

$A=\{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)\}$

$B=\{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (3,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 3),\ (5,\ 5)\}$

$C=\{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)\}$

したがって　$A\cap B=\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$

すなわち，**$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{C}$** が排反事象である。

教科書 P.41

問9 9枚のカードのうち，偶数のカードは4枚，奇数のカードは5枚ある。

また，9枚のカードの中から，同時に3枚引くとき，その引き方は ${}_9C_3$ 通りある。

3枚のカードがすべて偶数である事象を A

3枚のカードがすべて奇数である事象を B

とする。求める事象は $A\cup B$ で表される。

ここで，事象 A，B の確率は

$$P(A)=\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{4}{84},\quad P(B)=\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{10}{84}$$

である。A と B は互いに排反であるから，確率の加法定理により，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{84}+\frac{10}{84}=\frac{14}{84}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

教科書 P.42

問10 取り出したカードに書かれた数が6の倍数である事象を C，8の倍数である事象を D とすると，求める確率は $P(C\cup D)$ である。

ここで

$C=\{6\cdot 1,\ 6\cdot 2,\ \cdots,\ 6\cdot 16\}$

$D=\{8\cdot 1,\ 8\cdot 2,\ \cdots,\ 8\cdot 12\}$

$C\cap D=\{24\cdot 1,\ 24\cdot 2,\ 24\cdot 3,\ 24\cdot 4\}$

したがって，全事象を U とすると

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(U)}=\frac{16}{100}$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(U)}=\frac{12}{100}$$

$$P(C\cap D)=\frac{n(C\cap D)}{n(U)}=\frac{4}{100}$$

したがって，求める確率は

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)=\frac{16}{100}+\frac{12}{100}-\frac{4}{100}=\mathbf{\frac{6}{25}}$$

教科書 P.43

問11 “3個のうち，少なくとも1個は6の目が出る”という事象は，“3個とも6の目が出ない”という事象 A の余事象 $\overline{A}$ である。

ここで，確率 $P(A)$ は

$$P(A)=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$$

したがって，求める確率は

$$P(\overline{A})=1-P(A)=\mathbf{\frac{91}{216}}$$

問題

教科書 P.44

7 (1) 6人が1列に並ぶ並び方は ${}_6P_6=6!$ (通り) ある。これらは同様に確からしい。このうち，高校生と中学生が交互に並ぶのは，下の2通りである。

高中高中高中，　中高中高中高

このように並ぶ並び方は，高校生と中学生の並ぶ位置が定まっており，高校生と中学生それぞれの並び方は ${}_3P_3$ 通りあるから，${}_3P_3\times{}_3P_3$ (通り) ある。これが2通りずつあるから，全部で ${}_3P_3\times{}_3P_3\times 2$ (通り) ある。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_3P_3\times{}_3P_3\times 2}{{}_6P_6}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

(2) 6人から3人を選ぶ選び方は ${}_6C_3$ 通りある。これらは同様に確からしい。このうち，中学生が2人以上選ばれるのは，中学生2人と高校生1人，または，中学生3人が選ばれる場合である。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1+{}_3C_3}{{}_6C_3}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

8 袋の中の 10 個の球の中から同時に 3 個の球を取り出すとき，その取り出し方は全部で ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りある。これらは同様に確からしい。

(1) 白球 2 個，黒球 1 個を取り出す取り出し方は白球 7 個の中から 2 個取り出し，黒球 3 個の中から 1 個取り出す取り出し方であるから

${}_7\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1$（通り）

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\frac{21}{40}}$$

(2) 白球，黒球をともに少なくとも 1 個取り出すのは，次の 2 つの場合がある。

(i) 白球を 2 個，黒球を 1 個取り出す

(ii) 白球を 1 個，黒球を 2 個取り出す

(i) の確率は，(1) より $\dfrac{21}{40}$

(ii) の取り出し方は，白球 7 個の中から 1 個取り出し，黒球 3 個の中から 2 個取り出す取り出し方であるから

${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2$（通り）

よって，求める確率は

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{7}{40}$$

(i), (ii) は互いに排反であるから，確率の加法定理により，その確率は

$$\frac{21}{40} + \frac{7}{40} = \frac{28}{40} = \boldsymbol{\frac{7}{10}}$$

9 2 個とも赤球，白球，青球である事象をそれぞれ A，B，C とする。

2 個とも同じ色である事象は

$A \cup B \cup C$

で表される。

ここで，事象 A，B，C の確率は

$$P(A) = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2},\ P(B) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2},\ P(C) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}$$

である。A，B，C は互いに排反であるから，確率の加法定理により

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} + \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} + \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{14}{45}}$$

10 3 人のじゃんけんの手の出し方は，各自が「グー」「チョキ」「パー」の 3 通りであるから，全部で 3^3 通りある。

(1) A だけが勝つのは，A が「パー」，B と C が「グー」を出すなど，3 通りある。

したがって，求める確率は

$$\frac{3}{3^3} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

(2) あいこになるのは，3 人が異なる手を出す場合の 3! 通りと，3 人とも同じ手を出す 3 通りの場合がある。

したがって，求める確率は

$$\frac{3!+3}{3^3} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

11 “目の積が偶数になる”という事象は，“目の積が奇数になる”という事象 A の余事象 $\overline{A}$ である。積が奇数になるのは 2 個の目がともに奇数になる場合であるから

$$P(A) = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{1}{4}$$

したがって，求める確率は

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

12 7 文字を横 1 列に並べる並べ方は ${}_7\mathrm{P}_7$ 通りある。これらは同様に確からしい。

(1) A と B を 1 つとみなすと，${}_6\mathrm{P}_6$ 通りの並べ方があり，A と B が隣り合うのは，AB または BA の 2! 通りあるから，全部で ${}_6\mathrm{P}_6 \times 2!$（通り）ある。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_6 \times 2!}{{}_7\mathrm{P}_7} = \boldsymbol{\frac{2}{7}}$$

(2) B と C が隣り合わない事象は，B と C が隣り合う事象の余事象である。B と C が隣り合う確率は，(1) と同様に $\dfrac{2}{7}$ である。

したがって，求める確率は

$$1 - \frac{2}{7} = \boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

(3) C が D より左にあるのは，C と D の並ぶ位置が決まれば，左から C，D を配置すればよい。そこで，C，D の並べ方は，7 つの場所から 2 つの場所を選ぶ選び方の ${}_7\mathrm{C}_2$ 通りあり，他の A，B，E，F，G の並べ方は，残りの 5 つの場所に配置する ${}_5\mathrm{P}_5$ 通りある。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{P}_5}{{}_7\mathrm{P}_7} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

13 2 個のさいころを A，B とし，同様に確からしい根元事象で考えると，例えば，目の和が 2 になるのは，さいころ A，B の出る目がともに 1 である場合の 1 通りであるが，目の和が 3 になるのは A の出る目が 1，B の出る目が 2 の場合と，A の出る目が 2，B の出る目が 1 の場合の 2 通りある。したがって，目の和が 2 になる事象と 3 になる事象は同様に確からしいとはいえない。

同様に確からしいとはいえない事象を，ともに 1 通りとして，同様に確からしい事象と考えているため，誤りである。

14 席替え前の座り方を ABCD と表すとする。

席替えを行うとき，A，B，C，D の並び方は全部で $4! = 24$（通り）あり，これらは同様に確からしい。 ……①

“少なくとも 1 人は席替え前と同じ席になる”という事象 A の余事象 $\overline{A}$ は“全員が席替え前と同じ席にならない”という事象である。

$\overline{A}$ = {BADC, BCDA, BDAC, CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA}

であるから, “全員が席替え前と同じ席にならない” 場合は 9 通りある。

したがって，求める確率は

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{9}{4!}$$

$$= 1 - \frac{3}{8} = \mathbf{\frac{5}{8}}$$

〔別解〕

(① まで同じ)

少なくとも 1 人は席替え前と同じ席になるのは，次の 3 つの場合がある。

(i) 1 人のみが同じ席になる場合

例えば, A のみが同じ席になる場合, B, C, D は同じ席にならないから，その並び方は ACDB, ADBC の 2 通りである。

A, B, C, D のうち，どの 1 人が同じ席になる場合も同じように考えられるから，1 人のみが同じ席になる場合の数は

$2 \times 4 = 8$ (通り)

(ii) 2 人のみが同じ席になる場合

例えば, A と B のみが同じ席になる場合, C, D は同じ席にならないから, その並び方は ABDC の 1 通りである。

A, B, C, D のうち，どの 2 人が同じ席になる場合も同じように考えられるから，2 人のみが同じ席になる場合の数は

$1 \times {}_4C_2 = 6$ (通り)

(iii) 4 人全員が同じ席になる場合

ABCD の 1 通りである。

(i), (ii), (iii) より，求める確率は

$$\frac{8+6+1}{4!} = \frac{15}{4!} = \frac{5}{8}$$

〔補足〕

この問題において，余事象を考える方法では，場合分けは少ないが，数え上げるのに手間がかかる。直接求める方法（別解）では，場合分けは多いが，計算しやすい。

3 節 いろいろな確率

1 独立な試行の確率

教科書 P.45

問 1 (1) 1 組のトランプから 1 枚のカードを引く試行 T_1 の結果は，続いてさいころを投げる試行 T_2 の結果に影響しない。

すなわち，試行 T_1, T_2 は **独立である**。

(2) A がくじを引く試行 T_1 の結果によって，B がくじを引くときの当たりくじの割合が異なるから，試行 T_1 の結果は試行 T_2 の結果に影響を与える。すなわち，試行 T_1, T_2 は **独立でない**。

教科書 P.47

問 2 1 個のさいころを投げる各回の試行は独立である。

1 回目に偶数の目 2, 4, 6 が出て，2 回目に 6 の約数 1, 2, 3, 6 の目が出る確率は

$$\frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

問 3 取り出した球をもとに戻すから，1 回目の試行と 2 回目の試行は独立である。

(1) 取り出した 2 個の球が同じ色であるのは, 2 回とも赤球であるか, または 2 回とも白球である場合である。

(i) 1 回目, 2 回目ともに赤球を取り出す確率は

$$\frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$$

(ii) 1 回目, 2 回目ともに白球を取り出す確率は

$$\frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$

(i), (ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \mathbf{\frac{13}{25}}$$

(2) 取り出した 2 個の球が異なる色である事象は, 2 個の球が同じ色である事象の余事象であるから，求める確率は(1) より

$$1 - \frac{13}{25} = \mathbf{\frac{12}{25}}$$

教科書 P.48

問 4 それぞれの袋から球を取り出す試行は独立である。

(1) (i) A から赤球を取り出し，B と C から白球を取り出す確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{140}$$

(ii) B から赤球を取り出し，A と C から白球を取り出す確率は

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{27}{140}$$

(iii) C から赤球を取り出し，A と B から白球を取り出す確率は

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{24}{140}$$

(i), (ii), (iii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{140} + \frac{27}{140} + \frac{24}{140} = \mathbf{\frac{57}{140}}$$

(2) 少なくとも 1 個が白球である事象は，すべてが赤球である事象の余事象である。

したがって，求める確率は

$$1 - \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \mathbf{\frac{32}{35}}$$

2 反復試行の確率

教科書 P.49

問 5 5 回の試行で，事象 A がちょうど 4 回起こる場合

1章

の数は ${}_5C_4=5$（通り）あり，いずれの場合も，A が4回，A の余事象 $\overline{A}$ が1回起こるから，確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^1$ である。これらは互いに排反であるから，求める確率は

$${}_5C_4\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{4}{6}\right)^1=\mathbf{\frac{10}{243}}$$

教科書 P.50

問6 当たりくじを引く確率は $\frac{4}{10}$ であるから，求める確率は

$${}_5C_3\left(\frac{4}{10}\right)^3\left(\frac{6}{10}\right)^{5-3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$=\mathbf{\frac{144}{625}}$$

問7 ハートのカードを3回以上引く事象は，ハートのカードを3回引く事象と4回引く事象の和事象であり，これらは互いに排反である。

ハートのカードを1回引く確率は

$$\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

であるから，求める確率は

$${}_4C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0$$
$$=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^4=\mathbf{\frac{13}{256}}$$

教科書 P.51

問8 反復試行の考え方を用いると，求める確率は

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\mathbf{\frac{15}{64}}$$

問9 例題4より，5以上の目が r 回出たときの点Pの座標は $3r-6$ であるから，Pの座標がちょうど3になるのは

$3r-6=3$

のときである。よって　$r=3$

したがって，Pの座標がちょうど3になるのは，さいころを6回投げて，ちょうど3回5以上の目が出るときであるから，求める確率は

$${}_6C_3\left(\frac{2}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^3=20\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{160}{729}}$$

教科書 P.52

問10 (1) 5回目にBの優勝が決まるのは，4回目までにBが2勝2敗となり，5回目にBが勝つ場合であるから，求める確率は

$${}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{81}{512}}$$

(2) Bが優勝するのは

(i) 3回目に優勝が決まる場合，その確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

(ii) 4回目に優勝が決まる場合

3回目までにBが2勝1敗となり，4回目にBが勝つ場合であるから，その確率は

$${}_3C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$$

(iii) 5回目に優勝が決まる場合，その確率は(1)より　$\frac{81}{512}$

(i), (ii), (iii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{27}{64}+\frac{81}{256}+\frac{81}{512}=\mathbf{\frac{459}{512}}$$

3 | 条件付き確率

教科書 P.53

問11 $P_B(A)=\frac{n(B\cap A)}{n(B)}=\mathbf{\frac{13}{16}}$

教科書 P.54

問12 選び出された利用者が，高校生であるという事象を A，1年生であるという事象を B とすると

$$P(A)=\frac{35}{100},\quad P(A\cap B)=\frac{14}{100}$$

求める確率は，条件付き確率 $P_A(B)$ であるから

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{14}{100}\div\frac{35}{100}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

教科書 P.55

問13 2個目に黒球を取り出す事象は $\overline{B}$ である。

$$P(A)=\frac{4}{6},\quad P_A(\overline{B})=\frac{2}{6-1}=\frac{2}{5}$$

であるから，乗法定理により，求める確率は

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\times P_A(\overline{B})$$
$$=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{4}{15}}$$

問14 当たりくじを5本にすると

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$
$$=\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{90}$$
$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$$
$$=\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{25}{90}$$

したがって

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$
$$=\frac{20}{90}+\frac{25}{90}=\frac{45}{90}$$
$$=\frac{1}{2}$$

したがって，bが当たる確率は $\mathbf{\frac{1}{2}}$ である。

教科書 P.56

問15 $P(A)=\frac{1}{100}$，$P(\overline{A})=\frac{99}{100}$

$P_A(\overline{B})=\frac{1}{100}$，$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{98}{100}$

検査で陰性と判定されるのは，次の2つの場合である。

(i) 病原菌がいる検体が検査で陰性と判定される

場合

(ii) 病原菌がいない検体が検査で陰性と判定される場合

ここで，(i) の事象は $A\cap\overline{B}$，(ii) の事象は $\overline{A}\cap\overline{B}$ で表され，これらは互いに排反であるから

$$\begin{aligned}P(\overline{B})&=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})\\&=P(A)\times P_A(\overline{B})+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(\overline{B})\\&=\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{98}{100}\\&=\frac{1}{10000}+\frac{9702}{10000}\\&=\frac{9703}{10000}\end{aligned}$$

求める確率は，条件付き確率 $P_{\overline{B}}(A)$ であるから

$$\begin{aligned}P_{\overline{B}}(A)&=\frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(\overline{B})}=\frac{1}{10000}\div\frac{9703}{10000}\\&=\frac{1}{10000}\times\frac{10000}{9703}=\boldsymbol{\frac{1}{9703}}\end{aligned}$$

4 期待値

教科書 P.57

問 16 1 等が当たる確率は $\dfrac{1}{10}$

2 等が当たる確率は $\dfrac{2}{10}$

であるから，求める期待値は

$$1000\times\frac{1}{10}+500\times\frac{2}{10}=\mathbf{200}\ \textbf{(円)}$$

教科書 P.58

問 17 100 点となる確率は $\dfrac{1}{6}$

40 点となる確率は $\dfrac{2}{6}$

20 点となる確率は $\dfrac{3}{6}$

得点	100	40	20	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

であるから，求める期待値は

$$100\times\frac{1}{6}+40\times\frac{2}{6}+20\times\frac{3}{6}$$
$$=\frac{240}{6}=\mathbf{40}\ \textbf{(点)}$$

問 18 取り出される赤球の個数は，0，1，2 のいずれかである。

それぞれの起こる確率を p_0，p_1，p_2 とすると

$$p_0=\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$
$$p_1=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{6}{10}$$
$$p_2=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

したがって，求める期待値は

$$0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}$$
$$=\frac{12}{10}=\boldsymbol{\frac{6}{5}}\ \textbf{(個)}$$

問 19 5 以上の目が出る回数は，0，1，2，3 のいずれかである。

それぞれの起こる確率を p_0，p_1，p_2，p_3 とすると

$$p_0=\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$$
$$p_1={}_3C_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{12}{27}$$
$$p_2={}_3C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^1=\frac{6}{27}$$
$$p_3=\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{1}{27}$$

したがって，求める期待値は

$$0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{12}{27}+2\times\frac{6}{27}+3\times\frac{1}{27}$$
$$=\frac{27}{27}=\mathbf{1}\ \textbf{(回)}$$

教科書 P.59

問 20 [1] の場合の期待値は 30 分とみなせる。

[2] の場合の期待値を求めると

$$20\times\frac{2}{3}+35\times\frac{1}{3}=25\ (\text{分})$$

これは，[1] の交通手段の 30 分より短いから，**[2] の交通手段を利用する方がよい。**

問 21 1 の目が出た日の小遣いを x 円とする。

このとき，[2] の期待値は

$$x\times\frac{1}{6}+100\times\frac{5}{6}=\frac{x+500}{6}\ (\text{円})$$

これが 200 円に等しくなることより

$$\frac{x+500}{6}=200$$

これを解くと

$$x=\mathbf{700}\ \textbf{(円)}$$

問題

教科書 P.60

15 (1) くじを引く 2 回の試行は独立である。

当たりくじ 3 本を含む 5 本からなるくじから同時に 2 本のくじを引く場合，引いたくじがすべて当たりくじである確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

したがって，2 回とも引いたくじがすべて当たりである確率は

$$\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\boldsymbol{\frac{9}{100}}$$

(2) 少なくとも 1 本は当たりである事象は，2 回続けて 2 本ともはずれである事象の余事象である。

2 回続けて 2 本ともはずれである確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$$

したがって，求める確率は

$$1-\frac{1}{100}=\boldsymbol{\frac{99}{100}}$$

16 A が勝つのは，次の 2 つの場合である。

(i)　A が表を 2 枚出し，B が表を 1 枚または 0 枚出す場合

A が表を 2 枚出す確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

B が表を 1 枚または 0 枚出す確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$$

したがって　$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(ii)　A が表を 1 枚出し，B が表を 0 枚出す場合

A が表を 1 枚出す確率は

$${}_2C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

B が表を 0 枚出す確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

したがって　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}$$

17　硬貨を 3 回投げるとき，表が x 回出ると，裏は $(3-x)$ 回出る。このとき，点 P の動く道のりは

$$2\cdot x+1\cdot(3-x)=x+3$$

である。また，$x+3$ の範囲は

$$0+3\leqq x+3\leqq 3+3$$

すなわち　$3\leqq x+3\leqq 6$

である。この範囲で点 P が頂点 A に到達するのは，道のりが 4 のときであるから

$$x+3=4$$

すなわち　$x=1$

したがって，硬貨を 3 回投げて，ちょうど 1 回表が出るときであるから，求める確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

18　2 個のさいころを投げたとき，ゲームの得点は，右の表のようになる。したがって，求める期待値は

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$$1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}$$

$$=\frac{1+6+15+28+45+66}{36}$$

$$=\boldsymbol{\frac{161}{36}}\ \textbf{(点)}$$

19　(1)　箱 A を選ぶ事象を A，当たりくじを引く事象を E とすると，求める確率は

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

$P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$　であるから

$$P(E)=P(A\cap E)+P(\overline{A}\cap E)$$

$$=P(A)\times P_A(E)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(E)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}$$

$$=\frac{8}{20}$$

$$P(A\cap E)=\frac{5}{20}$$

したがって　$P_E(A)=\frac{5}{20}\div\frac{8}{20}=\boldsymbol{\frac{5}{8}}$

(2)　1 人目と同じ箱を選んだときに，当たりくじを引く確率は

$$P_E(A)\times\frac{4}{9}+P_E(\overline{A})\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{9}$$

$$=\frac{13}{36}=0.36111\cdots$$

1 人目と異なる箱を選んだときに，当たりくじを引く確率は

$$P_E(A)\times\frac{3}{10}+P_E(\overline{A})\times\frac{5}{10}$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{10}$$

$$=\frac{3}{8}=0.375$$

したがって，**1 人目と異なる箱からくじを引く場合の方が，当たりくじを引く確率は大きい。**

探究　くじに当たる確率は引く順番に関係ない？

教科書 P.61

考察1　c が当たりくじを引く場合は，右の表の 4 つの場合がある。求める確率は

a	b	c
○	○	○
○	×	○
×	○	○
×	×	○

$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$$

$$=\frac{6+42+42+126}{720}=\frac{216}{720}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

考察2　○を 3 つ，×を 7 つ並べる順列の総数は

$$\frac{10!}{3!7!}\ \text{(通り)}$$

この中で，左から $k\ (1\leqq k\leqq 10)$ 番目に○がある順列の総数は，残りの○を 2 つ，×を 7 つ並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{9!}{2!7!}\ \text{(通り)}$$

したがって，$k\ (1\leqq k\leqq 10)$ 番目にくじを引く人が当たりくじを引く確率は

$$\frac{9!}{2!7!}\div\frac{10!}{3!7!}=\frac{9!\times 3!7!}{2!7!\times 10!}=\frac{3}{10}$$

したがって，くじを引く順番に関係なく，くじに当たる確率は等しい。

練習問題 A

教科書 P.62

1 (i) 百の位に 4 がくる場合
十の位と一の位は，5 つの数字の何がきてもよいから
$5^2 = 25$（個）
(ii) 百の位に 3 がくる場合
十の位に 3 または 4 がくる場合は，一の位は，5 つの数字の何がきてもよいから
$2 \times 5 = 10$（個）
十の位が 2 の場合は，一の位は 1 以上の数がくればよいから　4 個
したがって　$10 + 4 = 14$（個）
(i)，(ii) より，全部で　$25 + 14 = \mathbf{39}$ **（個）**

2 (1) A，B 以外の 3 人を 6 人の中から選ぶ選び方は ${}_6C_3$ 通りで，その選び方のおのおのについて，5 人が円形のテーブルに座る座り方は $(5-1)!$ 通りあるから
$${}_6C_3 \times (5-1)! = 20 \times 24$$
$$= \mathbf{480}\ \textbf{（通り）}$$
(2) 求める場合の数は，(1) で求めた場合の数から，A と B が隣り合う場合の数を引けばよい。
隣り合う A，B を 1 人とみなし，4 人が座ると考える。これらの座り方に対して，A，B 2 人が入れかわる座り方を考えると，(1) のうち，A と B が隣り合う座り方は
$${}_6C_3 \times (4-1)! \times 2! = 240\ （通り）$$
したがって，求める場合の数は
$$480 - 240 = \mathbf{240}\ \textbf{（通り）}$$

3 5 個の球を円形に並べる円順列は，$(5-1)!$ 通りある。球をつなぎ合わせたとき，全体を裏返すと別の円順列になるが，首飾りとしては同じものである。
このように，1 つの円順列とそれを裏返した円順列では，同じ首飾りが作られる。
したがって，首飾りの総数は
$$\frac{(5-1)!}{2} = \mathbf{12}\ \textbf{（通り）}$$
（注）　このような順列をじゅず順列という。
異なる n 個のもののじゅず順列の総数は
$$\frac{(n-1)!}{2}$$

4 (1) 1 回取り出したとき，袋の中が白球だけになるのは，赤球を 2 個取り出したときである。
したがって，求める確率は
$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \mathbf{\frac{1}{10}}$$
(2) 2 回取り出したとき，初めて袋の中が白球だけになるのは，次の 2 つの場合である。
(i) 1 回目に白球 2 個，2 回目に赤球 2 個を取り出す場合，その確率は
$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}$$
(ii) 1 回目も 2 回目も白球 1 個，赤球 1 個を取り出す場合，その確率は
$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_1C_1}{{}_4C_2} = \frac{6}{10} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{10}$$
(i)，(ii) は互いに排反であるから，求める確率は
$$\frac{3}{100} + \frac{3}{10} = \mathbf{\frac{33}{100}}$$

5 同時に取り出した 2 個が同じ色である事象は，同時に取り出した 2 個が赤球 1 個と白球 1 個である事象の余事象である。
袋に入っている赤球の個数を $x (0 \leqq x \leqq 9)$ 個とすると，同時に取り出した 2 個が赤球 1 個と白球 1 個である確率は
$$\frac{x(9-x)}{{}_9C_2}$$
と表される。この確率が $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ と等しいから
$$\frac{x(9-x)}{{}_9C_2} = \frac{1}{2}$$
両辺に ${}_9C_2$，すなわち $\frac{9 \cdot 8}{2}$ を掛けて
$$x(9-x) = \frac{1}{2} \times \frac{9 \cdot 8}{2}$$
整理して　$x^2 - 9x + 18 = 0$
$(x-3)(x-6) = 0$
これを解くと　$x = 3,\ 6$
$0 \leqq x \leqq 9$ より，赤球は **3 個または 6 個** である。

6 1 個のさいころを投げて，4 以下の目が出る事象を A とする。6 回以下で 4 つ進んで上がるのは，次の 3 つの場合である。
(i) 4 回連続で事象 A が続く場合
(ii) 5 回中の 4 回目までに事象 A が 3 回，事象 $\overline{A}$ が 1 回起こった後，5 回目に事象 A が起こる場合
(iii) 6 回中の 5 回目までに事象 A が 3 回，事象 $\overline{A}$ が 2 回起こった後，6 回目に事象 A が起こる場合
(i)，(ii)，(iii) は互いに排反であるから，求める確率は
$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 + {}_4C_3\left(\frac{4}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^1 \times \frac{4}{6}$$
$$+ {}_5C_3\left(\frac{4}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{4}{6}$$
$$= \frac{16}{81} + \frac{64}{243} + \frac{160}{729} = \mathbf{\frac{496}{729}}$$

7 (1) 目の最大値が 4 以下であるためには，3 個のさいころの目がすべて 1，2，3，4 のいずれかであればよい。
よって，求める確率は　$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \mathbf{\frac{8}{27}}$

(2)　目の最大値が 4 となるのは，目の最大値が 4 以下となる場合から，目の最大値が 3 以下となる場合を除いたものである。

ここで，目の最大値が 3 以下となる確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3$$

よって，求める確率は　$\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\boldsymbol{\frac{37}{216}}$

8　A の勝つ試合数は 0，1，2，3 のいずれかである。それぞれの起こる確率を p_0，p_1，p_2，p_3 とする。

$$p_0=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$$

$$p_1={}_3C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$$

$$p_2={}_3C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{54}{125}$$

$$p_3=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$$

であるから，求める期待値は

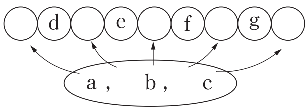
$$0\times\frac{8}{125}+1\times\frac{36}{125}+2\times\frac{54}{125}+3\times\frac{27}{125}$$

$$=\frac{36+108+81}{125}=\frac{225}{125}=\boldsymbol{\frac{9}{5}}\ \textbf{(回)}$$

練習問題 B

教科書 P.63

9　(1)　下のように，d，e，f，g の 4 文字の間，または端のどこかに a，b，c の 3 文字を並べる順列である。



d，e，f，g を並べる順列は　4! 通り

そのおのおのに対して a，b，c の入れ方は 5 か所のうちの 3 か所に並べる順列で　${}_5P_3$ 通り

したがって，求める場合の数は

$4!\times{}_5P_3=\mathbf{1440}$ **(通り)**

(2)　7 か所から 3 か所を選んで，左から順に a，b，c を入れ，残りの 4 か所に d，e，f，g を並べればよいから，求める場合の数は

${}_7C_3\times4!=\mathbf{840}$ **(通り)**

〔別解〕 a，b，c をすべて同じ文字 X，X，X とみなして X，X，X，d，e，f，g の順列をつくり，そのおのおのに対して，3 個の X に a，b，c を左から順に入れればよいから，

求める場合の数は

$$\frac{7!}{3!1!1!1!1!}=840\ (\text{通り})$$

10　(1)　まず 1 つの面に色を塗り，それを上面に固定して考える。

このとき，下面の色の決め方はすでに塗った色以外の 5 通りある。

そのおのおのに対して，側面の 4 面の塗り方は，4 個のものの円順列の総数に等しく $(4-1)!$ 通りある。

したがって，求める塗り方の総数は

$5\times(4-1)!=\mathbf{30}$ **(通り)**

(2)　5 色のうち 1 色を向かい合う 2 つの面に塗り，その 2 面を上下に固定して考える。上下 2 面の色の選び方は 5 通りある。

そのおのおのに対して，側面の 4 面の塗り方は，4 個のものの円順列で，上下を逆にすると同じ塗り方になるものが 2 通りずつあるから，$\dfrac{(4-1)!}{2}$ 通りある。

したがって，求める塗り方の総数は

$5\times\dfrac{(4-1)!}{2}=\mathbf{15}$ **(通り)**

(3)　3 面を同じ色で塗ることはできないから，4 色の塗り方は，3 組の対面のうち，1 組の対面を異なる色で塗り，残りの 2 組の対面を残りの 2 色で塗る場合のみである。

1 組の対面を異なる色で塗る塗り方は，${}_4C_2$ 通りである。残りの 2 組の対面を塗る塗り方は 1 通りである。

したがって，求める塗り方の総数は

${}_4C_2\times1=\mathbf{6}$ **(通り)**

11　1 回に取り出す赤球の個数は 0，1，2 のいずれかであり，それぞれの確率を p_0，p_1，p_2 とすると

$$p_0=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$

$$p_1=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$$

$$p_2=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$$

ここで，3 回目までに取り出した赤球の総数が 4 であるのは，各回に取り出した赤球の個数が，2，2，0，または，2，1，1 の場合であり，それぞれの確率は次のようになる。

${}_3C_2(p_2)^2p_0$，${}_3C_1p_2(p_1)^2$

2 つの場合は互いに排反であるから，求める確率は

$${}_3C_2(p_2)^2p_0+{}_3C_1p_2(p_1)^2$$

$$=3\times\left(\frac{2}{7}\right)^2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{2}{7}\times\left(\frac{4}{7}\right)^2=\boldsymbol{\frac{108}{343}}$$

12　製品が不良品である事象を A，品質検査で不良品であると判定される事象を B とすると

$$P(A)=\frac{3}{100},\ P(\overline{A})=\frac{97}{100}$$

$$P_A(B)=\frac{99}{100},\ P_{\overline{A}}(B)=\frac{1}{100}$$

(1)　不良品と判定されるのは次の 2 つの場合である。

(i)　不良品が品質検査で不良品と判定される場合

(ii) 良品が品質検査で不良品と判定される場合

ここで，(i) の事象は $A\cap B$，(ii) の事象は $\overline{A}\cap B$ で表され，これらは互いに排反であるから

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\\ &= P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)\\ &= \frac{3}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{97}{100}\times\frac{1}{100}\\ &= \frac{297}{10000}+\frac{97}{10000}\\ &= \mathbf{\frac{197}{5000}}\end{aligned}$$

(2) 不良品と判定された製品が本当に不良品である確率は，条件付き確率 $P_B(A)$ であるから

$$\begin{aligned}P_B(A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{297}{10000}\div\frac{197}{5000}\\ &= \mathbf{\frac{297}{394}}\end{aligned}$$

13 (1) 硬貨を 4 回投げるとき，表が x 回出ると，裏は $(4-x)$ 回出る。このとき，点 P の動く道のりは

$$2x+(4-x)=x+4$$

であるから，点 P が 4 回目に座標 5 の点にちょうど到達するのは

$$x+4=5$$

すなわち

$$x=1$$

したがって，表が 1 回，裏が 3 回出るときである。この 4 回の硬貨の出方はどの順に出ても 4 回目に初めてちょうど座標 5 の点に到達するから，求める確率は

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) 硬貨を投げる回数は

(i) 2 回 … (表，裏)，(表，表)，(裏，表)

(ii) 3 回 … (裏，裏，表)，(裏，裏，裏)

のいずれかである。それぞれの起こる確率を p_2，p_3 とする。

$$p_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$$p_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

であるから，求める期待値は

$$2\times\frac{3}{4}+3\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{9}{4}}\ \textbf{(回)}$$

14 A，B，C の家のどこかに帽子を忘れてくるという事象を E，家 B に帽子を忘れてくるという事象を F とする。事象 E はどの家にも帽子を忘れないという事象の余事象であり，事象 $E\cap F$ は「家 A に帽子を忘れず，家 B に帽子を忘れてくる」という事象である。したがって

$$P(E)=1-\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{61}{125}$$

$$P(E\cap F)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

求める確率は，A，B，C のどこかの家に帽子を忘れてきたことが分かっているときに家 B に忘れてくる条件付き確率 $P_E(F)$ であるから

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{4}{25}\div\frac{61}{125}=\mathbf{\frac{20}{61}}$$

演習問題

教科書 P.63 (QR コンテンツ)

1 条件より

$$14\times13\leqq N<14\times14$$

かつ

$$21\times8\leqq N<21\times9$$

すなわち

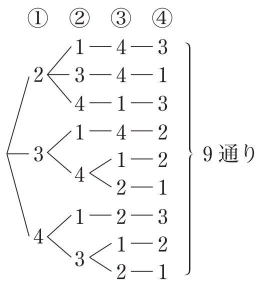
$182\leqq N<196$　かつ　$168\leqq N<189$

したがって　　$182\leqq N<189$

この範囲で 5 の倍数であるものは　**185**

2 (1) 4 枚のカードを並べる並べ方の総数は 4! 通りある。

並べる順番を ①，②，③，④ とし，順番と番号が一致しないものを樹形図にかくと，次のようになり，9 通りある。



したがって，求める確率は

$$\frac{9}{4!}=\mathbf{\frac{3}{8}}$$

(2) 6 枚のカードを並べる並べ方の総数は 6! 通りある。

順番と番号の一致する 2 枚のカードを選ぶ組合せは ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあり，残りの 4 枚のカードについて，順番と番号がすべて一致しない並べ方は (1) より，9 通りある。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times9}{6!}=\mathbf{\frac{3}{16}}$$

3 4 人の手の出し方は 3^4 通りである。

(1) 1 回目で 1 人の勝ちが決まるのは

誰が勝つかで　4 通り

そのときの手の出し方は

(i) 1 人がグーで 3 人がチョキ

(ii) 1 人がチョキで 3 人がパー

(iii) 1 人がパーで 3 人がグー

の 3 通りある。

したがって，求める確率は

$$\frac{4\times3}{3^4}=\frac{4}{\mathbf{27}}$$

(2)　1 回目で 2 人が勝つのは

どの 2 人が勝ち残るかで　${}_4C_2$ 通り

そのときの手の出し方は

(i)　2 人がグーで 2 人がチョキ

(ii)　2 人がチョキで 2 人がパー

(iii)　2 人がパーで 2 人がグー

の 3 通りある。

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_4C_2\times3}{3^4}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$$

(3)　まず，1 回目に 3 人が勝つ確率と 1 回目にあいこである確率を求める。

1 回目に 3 人が勝つ確率は，(1) と同様に考えると

$$\frac{{}_4C_3\times3}{3^4}=\frac{4}{27}\qquad\cdots\cdots①$$

1 回目にあいこである確率は，余事象を考えて，(1)，(2)，① より

$$1-\frac{4}{27}-\frac{2}{9}-\frac{4}{27}=\frac{13}{27}\qquad\cdots\cdots②$$

2 回目のじゃんけんで 1 人の勝ちが決まるのは

(i)　1 回目はあいこで，2 回目に 1 人が勝つ

(ii)　1 回目に 2 人が勝って，2 回目に 1 人が勝つ

(iii)　1 回目に 3 人が勝って，2 回目に 1 人が勝つ

の 3 つの場合がある。

(i) の場合の確率

2 回目に 4 人でじゃんけんをするから，② と (1) より

$$\frac{13}{27}\times\frac{4}{27}=\frac{52}{729}$$

(ii) の場合の確率

2 回目に 2 人でじゃんけんをする。

どちらが勝つかで　2 通り

そのときの手の出し方は 3 通りであるから，確率は

$$\frac{2\times3}{3^2}=\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots③$$

したがって，(ii) の場合の確率は，(2) と ③ より

$$\frac{2}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$$

(iii) の場合の確率

2 回目に 3 人でじゃんけんをする。このとき，1 人が勝つ確率は誰が勝つかで　3 通り

そのときの手の出し方は 3 通りであるから

$$\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots④$$

したがって，(iii) の場合の確率は，① と ④ より

$$\frac{4}{27}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$$

(i)，(ii)，(iii) は互いに排反であるから，確率の加法定理により，求める確率は

$$\frac{52}{729}+\frac{4}{27}+\frac{4}{81}=\frac{\mathbf{196}}{\mathbf{729}}$$

探究　同じ誕生日の人がいる確率

教科書 P.64

考察1　5 人の中にあなたと同じ誕生日の人が少なくとも 1 人いるという事象は，5 人ともあなたと異なる誕生日であるという事象の余事象であるから，求める確率は

$$\mathbf{1-\left(\frac{364}{365}\right)^5}$$

考察2　考察 1 と同様に考えると，求める確率は

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{40}=0.10393241\cdots$$

四捨五入して小数第 3 位までを求めると **0.104** である。

考察3　40 人のうち，同じ誕生日の人が少なくとも 1 組いるという事象は，40 人全員が異なる誕生日であるという事象の余事象である。ここで，40 人全員が異なる誕生日である確率は

$$\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\cdots\times\frac{326}{365}=\frac{{}_{365}P_{40}}{365^{40}}$$

したがって，求める確率は

$$1-\frac{{}_{365}P_{40}}{365^{40}}=0.8912318\cdots$$

四捨五入して小数第 3 位までを求めると **0.891** である。

考察4　n 人のうち，同じ誕生日の人が少なくとも 1 組いる確率は次の表のようになる。

n	1	2	3	4	5
確率	0	0.002740	0.008204	0.016356	0.027136
	6	7	8	9	10
	0.040462	0.056236	0.074335	0.094624	0.116948
	11	12	13	14	15
	0.141141	0.167025	0.194410	0.223103	0.252901
	16	17	18	19	20
	0.283604	0.315008	0.346911	0.379119	0.411438
	21	22	23	24	25
	0.443688	0.475695	0.507297	0.538344	0.568700
	26	27	28	29	30
	0.598241	0.626859	0.654461	0.680969	0.706316
	31	32	33	34	35
	0.730455	0.753348	0.774972	0.795317	0.814383
	36	37	38	39	40
	0.832182	0.848734	0.864068	0.878220	0.891232

したがって，**23 人以上** 選ぶとき，同じ誕生日の人が少なくとも 1 組いる確率は 50% 以上になる。